

Ю. А. ПЛАКСИЙ, І. О. ГОМОЗКОВА

# НОВІ ДВОЧАСТОТНІ ЕТАЛОННІ МОДЕЛІ ОБЕРТАННЯ ТВЕРДОГО ТІЛА ДЛЯ ТОЧНОСНОГО АНАЛІЗУ АЛГОРИТМІВ ОРІЄНТАЦІЇ БІНС

Запропоновано нові аналітичні представлення розв'язків рівнянь обертання твердого тіла і оснований на них неперервні двочастотні еталонні моделі обертання. Отримано аналітичні залежності для квазікоординат і компонент кватерніона, що відповідають такому обертальному руху. Для декількох наборів параметрів отримано чисельні реалізації моделей і проведено чисельний аналіз поведінки оцінки похибки дрейфу для алгоритму орієнтації третього порядку. Показано, що тестовий обертальний рух на основі двочастотних еталонних моделей приводить до значно більшої похибки визначення орієнтації, ніж це має місце при регулярній прецесії.

**Ключові слова:** кватерніон, еталонна модель, тестовий рух, квазікоординати, траєкторії в конфігураційному просторі, алгоритм орієнтації, похибка дрейфу.

Ю. А. ПЛАКСИЙ, И. А. ГОМОЗКОВА

# НОВЫЕ ДВУХЧАСТОТНЫЕ ЭТАЛОННЫЕ МОДЕЛИ ВРАЩЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ДЛЯ ТОЧНОСТНОГО АНАЛИЗА АЛГОРИТМОВ ОРИЕНТАЦИИ БИНС

Предложены новые аналитические представления решений уравнений вращения твердого тела и основанные на них непрерывные двухчастотные эталонные модели вращения. Получены аналитические зависимости для квазикоординат и кватерниона, соответствующего такому вращательному движению. Для нескольких наборов параметров получены численные реализации моделей и проведен численный анализ поведения оценки погрешности дрейфа для алгоритма ориентации третьего порядка. Показано, что тестовое вращательное движение на основе двухчастотных эталонных моделей приводит к значительно большей погрешности определения ориентации, нежели это имеет место при регулярной прецессии.

**Ключевые слова:** кватернион, эталонная модель, тестовое движение, квазикоординаты, траектории в конфигурационном пространстве, алгоритм ориентации, погрешность дрейфа.

YU. A. PLAKSIY, I. A. HOMOZKOVA

# NEW TWO-FREQUENCY REFERENCE MODELS OF RIGID BODY ROTATION FOR ERROR ANALYSIS OF SINS ORIENTATION ALGORITHMS

New analytical representations of solutions of the equations of rigid body rotation and continuous two-frequency reference models of rotation based on them are proposed. Analytical dependences are obtained for the quasi-coordinates and the quaternion corresponding to such rotational motion. For several sets of parameters the models are implemented numerically and the behaviour of the drift error for the third-order orientation algorithm is numerically analyzed. It is shown that the test rotational motion based on the two-frequency reference models leads to a much larger error in determining orientation than is the case with regular precession.

**Key words:** quaternion, reference model, test motion, quasicordinates, trajectories in configuration space, algorithm of orientation, drift error.

**Вступ.** Як вбачається з [1], проблема розробки ефективних алгоритмів *безплатформених інерціальних навігаційних систем* (БІНС) в теперішній час вважається вичерпаною. Зусиллями багатьох дослідників розроблено значну кількість алгоритмів БІНС, зокрема алгоритмів орієнтації [2 – 4]. Однак, задача отримання коректних оцінок похибок розроблених алгоритмів орієнтації і вибору найкращого алгоритму для конкретного рухомого об'єкту є все ж актуальною. Для оцінювання методичних похибок алгоритмів орієнтації традиційно застосовуються тестові рухи твердого тіла, такі як регулярна прецесія та кінчне обертання [5, 6], для яких ідеальні сигнали з виходів гіроскопів і відповідні параметри орієнтації задаються в аналітичному вигляді. Розроблено також методики оптимізації коефіцієнтів алгоритмів орієнтації під кінчний рух [7 – 9] або під регулярну прецесію [10] шляхом мінімізації локальної похибки обчисленого дрейфу. Такі оптимізовані алгоритми в умовах рухів, під які були відкоректовані їх коефіцієнти, на 2 порядки точніші, ніж відповідні неоптимізовані алгоритми, але в умовах довільного руху вони демонструють більш низьку точність, поступаючись відповідним неоптимізованим алгоритмам. При цьому оптимізовані в умовах кінчного руху алгоритми орієнтації незалежно від їх порядку точності у випадку довільного руху є алгоритмами 3-го порядку точності [1]. Оскільки кінчний рух вбачається достатньо ідеалізованим для опису руху реальних об'єктів, була зроблена спроба оцінювання ефективності використання алгоритмів орієнтації з оптимізованими під кінчний рух коефіцієнтами в умовах більш загальних видів руху. При цьому дослідження проводилися як в напрямку ускладнення детермінованого руху об'єкта, так і в напрямку переходу до стохастичного опису руху. В роботі [11] представлені результати дослідження похибок визначення кутової орієнтації об'єкта в умовах узагальненого кінчного руху, коли складові кутової швидкості об'єкта описуються еліптичними функціями Якобі. Наведені результати підтверджують той факт, що алгоритми з оптимізованими для кінчного руху коефіцієнтами втрачають оптимальність в умовах більш складного руху.

Тестові рухи, для яких оптимізуються коефіцієнти алгоритмів орієнтації, – це фактично відомі розв'язки сукупності динамічних і кінематичних рівнянь твердого тіла. Аналітичні розв'язки рівнянь обертання твердого тіла, відмінні від класичних, представлені в роботах [12, 13]. В даній роботі розглядаються нові двочастотні розв'язки рівнянь обертання твердого тіла, оснований на мультиплікативних аналітичних представленнях компонент кватерніона орієнтації, і наводяться побудовані на цих розв'язках неперервні еталонні моделі обертання.

**Постановка задачі.** Розглядається обертальний рух твердого тіла навколо його центру мас, який описується-

ся системою динамічних рівнянь

$$I_1 \dot{\omega}_1(t) - (I_2 - I_1) \omega_2(t) \omega_3(t) = M_1(t), \quad (1, 2, 3), \quad (1)$$

де  $I_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  – моменти інерції твердого тіла;  $M_i(t)$ ,  $i = 1, 2, 3$  – проекції вектора головного моменту;  $\omega_i$ ,  $i = 1, 2, 3$  – проекції вектора абсолютної кутової швидкості  $\vec{\omega}(t)$  на зв'язані осі;  $(1, 2, 3)$  – символ кругової перестановки індексів і кінематичного кватерніонного рівняння

$$\dot{\Lambda}(t) = 0,5 \Lambda(t) \circ \omega(t), \quad (2)$$

де  $\Lambda(t) = (\lambda_0(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t))$  – кватерніон орієнтації;  $\omega(t) = (0, \omega_1(t), \omega_2(t), \omega_3(t))$  – кватерніон кутової швидкості;  $\circ$  – символ кватерніонного множення.

Необхідно отримати двочастотні розв'язки системи рівнянь (1), (2) у вигляді аналітичних залежностей  $\omega_i = \omega_i(k_1, k_2, t)$ ,  $i = 1, 2, 3$ ,  $\lambda_j = \lambda_j(k_1, k_2, t)$ ,  $j = \overline{0, 3}$  і оснований на цих розв'язках параметричні аналітичні *еталонні моделі обертання твердого тіла* у вигляді сукупності *квазікоординат*

$$\theta_{ni}^* = \int_{t_{n-1}}^{t_n} \omega_i(t) dt, \quad i = 1, 2, 3 \quad (3)$$

на такті обчислень  $[t_{n-1}, t_n]$  і модельного кватерніона орієнтації  $\Lambda(t)$ , що відповідає цим кутовим рухам.

Методика отримання аналітичних еталонних моделей детально описана в [13]. Вона оснований на представленні модельного кватерніона орієнтації  $\Lambda(t) = (\lambda_0(t), \lambda_1(t), \lambda_2(t), \lambda_3(t))$  тригонометричними функціями кутів лінійних поворотів  $k_i t$ , що забезпечує виконання умови нормування модельного кватерніона  $\|\Lambda(t)\| = 1$ .

В даній роботі розглядаються два нові двочастотні розв'язки рівнянь обертання твердого тіла, оснований на тригонометричних представленнях модельного кватерніона орієнтації, і наводяться побудовані на цих розв'язках неперервні еталонні моделі обертання.

#### Нові двочастотні розв'язки рівнянь обертання твердого тіла.

**Перший двочастотний розв'язок.** Задамо аналітичний розв'язок кінематичного рівняння (2) у вигляді:

$$\begin{aligned} \lambda_0(t) &= \eta \cos(k_1 t) \cdot \cos(k_2 t); \quad \lambda_1(t) = \xi \cos(k_1 t) \cdot \sin(k_2 t) - \sin(k_1 t) \cdot \cos(k_2 t); \\ \lambda_2(t) &= \xi \cos(k_1 t) \cdot \cos(k_2 t) + \sin(k_1 t) \cdot \sin(k_2 t); \quad \lambda_3(t) = \eta \cos(k_1 t) \cdot \sin(k_2 t), \end{aligned} \quad (4)$$

де  $k_1, k_2$  – невідомі частоти ( $k_1 \neq k_2$ );  $\eta$  і  $\xi$  – параметри, для яких виконується умова  $\eta^2 + \xi^2 = 1$ .

Для цього представлення кватерніона орієнтації згідно оберненого кінематичного рівняння

$$\vec{\omega}(t) = 2\tilde{\Lambda}(t) \circ \dot{\Lambda}(t),$$

де  $\tilde{\Lambda}(t)$  – спряжений кватерніон, отримаємо, що проекції вектора кутової швидкості твердого тіла на зв'язані осі набувають вигляду:

$$\omega_1(t) = -2\eta k_1 \cos(2k_2 t); \quad \omega_2(t) = 2\eta k_1 \sin(2k_2 t); \quad \omega_3(t) = -2\xi k_1 + 2k_2. \quad (5)$$

Отриманий аналітичний розв'язок рівнянь обертання (1), (2) відповідає початковим умовам  $\Lambda(0) = (\eta, 0, \xi, 0)$ ,  $\vec{\omega}(0) = (-2\eta k_1, 0, -2\xi k_1 + 2k_2)$ . При цьому перша та друга компоненти вектора кутової швидкості змінюються за гармонійним законом, а третя компонента є постійною, як це має місце при класичній регулярній прецесії динамічно симетричного твердого тіла ( $I_1 = I_2 \neq I_3$ ). Дійсно, у випадку  $I_1 = I_2 \neq I_3$  для кінетичного моменту твердого тіла  $\vec{K}$  будемо мати  $K^2 = 4\eta^2 k_1^2 I_1^2 + 4I_3^2 (-\xi k_1 + k_2)^2 = \text{const}$ . Однак, як це буде показано далі, запропонований розв'язок (4), (5) є більш узагальненим випадком обертального руху твердого тіла.

Для цього розв'яжемо обернену задачу динаміки, тобто знайдемо зовнішні моменти, які забезпечують рух твердого тіла з компонентами кутової швидкості (5). Отримаємо з (1):

$$\begin{aligned} M_1(t) &= 4\eta k_1 \sin(2k_2 t) (I_1 k_2 + (I_2 - I_3)(\xi k_1 - k_2)); \quad M_2(t) = 4\eta k_1 \cos(2k_2 t) (I_2 k_2 + (I_3 - I_1)(-\xi k_1 + k_2)); \\ M_3(t) &= 2\eta^2 k_1^2 \sin(4k_2 t) (I_1 - I_2). \end{aligned} \quad (6)$$

Очевидно, що в загальному випадку несиметричного твердого тіла його рух під дією моментів (6) не є вільним обертанням. Для динамічно симетричного твердого тіла у випадку, коли  $I_1 = I_2$ , знайдемо проекції зовнішнього моменту, що підтримує регулярну прецесію:

$$M_1(t) = 4\eta k_1 \sin(2k_2 t) (I_3 k_2 + (I_1 - I_3) \xi k_1); \quad M_2(t) = 4\eta k_1 \cos(2k_2 t) (I_3 k_2 + (I_1 - I_3) \xi k_1); \quad M_3(t) = 0. \quad (7)$$

Очевидно, що тільки в умовах, коли  $I_3 k_2 + (I_1 - I_3) \xi k_1 = 0$  ( $k_1 \neq 0$ ,  $k_2 \neq 0$ ,  $\eta \neq 0$ ), рух твердого тіла з проекціями кутової швидкості (5) є класичним випадком регулярної прецесії. Це має місце, якщо параметр  $\xi$  набуває значення:

$$\xi = \frac{I_3 k_2}{(I_3 - I_1) k_1}.$$

Розглянемо загальний випадок розв'язку (4), коли  $\eta = 0$  ( $\xi = \pm 1$ ). При цьому маємо вільний обертальний рух твердого тіла ( $M_i = 0$ ,  $i = 1, 2, 3$ ) з постійною кутовою швидкістю навколо третьої осі:

$$\omega_1(t) = 0; \omega_2(t) = 0; \omega_3(t) = -2\xi k_1 + 2k_2. \quad (8)$$

Кватерніон орієнтації для цього випадку руху має вигляд

$$\Lambda(t) = (0, \sin((k_2 - k_1)t), \cos((k_2 - k_1)t), 0), \quad (9)$$

тобто  $\Lambda(0) = (0, 0, 1, 0)$ .

Якщо в загальному випадку розв'язку (4) покласти  $\xi = 0$ ,  $\eta = 1$ , отримаємо, що це рух твердого тіла під впливом моменту  $\vec{M}(t) = (4k_1k_2 \sin(2k_2t)(I_1 - I_2 + I_3), 4k_1k_2 \cos(2k_2t)(I_2 + I_3 - I_1), 2k_1^2 \sin(4k_2t)(I_1 - I_2))$ , який характеризується вектором кутової швидкості  $\vec{\omega}(t) = (-2k_1 \cos(2k_2t), 2k_1 \sin(2k_2t), 2k_2)$  і кватерніоном орієнтації  $\Lambda(t) = (\cos(k_1t) \cdot \cos(k_2t); -\sin(k_1t) \cdot \cos(k_2t); \sin(k_1t) \cdot \sin(k_2t), \cos(k_1t) \cdot \sin(k_2t))$ . Тоді для кінетичного моменту твердого тіла  $\vec{K}$  будемо мати  $K^2 = 4k_1^2(I_1^2 \cos^2(2k_2t) + I_2^2 \sin^2(2k_2t) + 4I_3^2 k_2^2) \neq const$ , тобто регулярна прецесія не спостерігається. Для динамічно симетричного твердого тіла ( $I_1 = I_2$ ) отримаємо:  $K^2 = 4k_1^2 I_1^2 + 4I_3^2 k_2^2 = const$ , тобто у цьому випадку має місце вимушена регулярна прецесія.

**Другий двочастотний розв'язок.** Аналітичний розв'язок кінематичного рівняння (2) задамо у вигляді:

$$\begin{aligned} \lambda_0(t) &= \eta \cos(k_1t) \cdot \cos(k_2t) + \xi \sin(k_1t) \cdot \sin(k_2t); \lambda_1(t) = \cos(k_1t) \cdot \sin(k_2t); \\ \lambda_2(t) &= \sin(k_1t) \cdot \cos(k_2t); \lambda_3(t) = \xi \cos(k_1t) \cdot \cos(k_2t) - \eta \sin(k_1t) \cdot \sin(k_2t), \end{aligned} \quad (10)$$

де  $k_1, k_2$  – невідомі частоти ( $k_1 \neq k_2$ );  $\eta$  і  $\xi$  – параметри, для яких виконується умова  $\eta^2 + \xi^2 = 1$ .

Відповідний розв'язок динамічних рівнянь (1) згідно оберненого кінематичного рівняння (2) матиме вигляд:

$$\omega_1(t) = 2\xi k_1 \cos(2k_2t) + 2\eta k_2, \omega_2(t) = 2\eta k_1 \cos(2k_2t) - 2\xi k_2, \omega_3(t) = -2k_1 \sin(2k_2t). \quad (11)$$

Значимо, що перша та друга компоненти вектора кутової швидкості містять постійні складові, а третя компонента змінюється за гармонійним законом і не залежить від параметрів  $\eta$  і  $\xi$ . Цей розв'язок відповідає початковим умовам:  $\Lambda(0) = (\eta, 0, 0, \xi)$ ,  $\vec{\omega}(0) = (2\xi k_1 + 2\eta k_2, 2\eta k_1 - 2\xi k_2, 0)$ . Оскільки жодна компонента вектора кутової швидкості (11) в загальному випадку значень параметрів  $\eta$  і  $\xi$  не є постійною, то таке обертання суттєво відрізняється від випадків регулярної прецесії та кінчного руху.

Знайдемо моменти, під дією яких відбувається рух твердого тіла з компонентами кутової швидкості (11):

$$\begin{aligned} M_1(t) &= -4k_1 \sin(2k_2t)(I_1 \xi k_2 - (I_2 - I_3)(\eta k_1 \cos(2k_2t) - \xi k_2)); \\ M_2(t) &= -4k_1 \sin(2k_2t)(I_2 \eta k_2 - (I_3 - I_1)(\xi k_1 \cos(2k_2t) + \eta k_2)); \\ M_3(t) &= -4I_3 k_1 k_2 \cos(2k_2t) - 4(I_1 - I_2)(\xi k_1 \cos(2k_2t) + \eta k_2)(\eta k_1 \cos(2k_2t) - \xi k_2). \end{aligned} \quad (12)$$

Розглянемо частинний випадок розв'язку (10), коли  $\eta = 0$ ,  $\xi = 1$ . Для кватерніона орієнтації матимемо:  $\Lambda(t) = (\sin(k_1t) \cdot \sin(k_2t); \cos(k_1t) \cdot \sin(k_2t); \sin(k_1t) \cdot \cos(k_2t); \cos(k_1t) \cdot \cos(k_2t))$ , а вектор кутової швидкості набуває вигляду:  $\vec{\omega}(t) = (2k_1 \cos(2k_2t); -2k_2; -2k_1 \sin(2k_2t))$ . Даний обертальний рух відбувається під дією вектора моменту  $\vec{M}(t) = (-4k_1k_2(I_1 + I_2 - I_3) \sin(2k_2t); 2k_1^2(I_3 - I_1) \sin(4k_2t); 4k_1k_2(I_1 - I_2 - I_3) \cos(2k_2t))$ . Початкові умови руху:  $\Lambda(t) = (0; 0; 0; 1)$ ,  $\vec{\omega}(t) = (2k_1; -2k_2; 0)$ . Для динамічно симетричного твердого тіла  $I_1 = I_3$  цей рух є вимушеною регулярною прецесією ( $K^2 = 4I_1^2 k_1^2 + 4I_2^2 k_2^2 = const$ ).

Якщо у розв'язку (10) задати значення параметрів  $\eta = 1$ ,  $\xi = 0$ , то отримаємо розв'язок динамічних рівнянь (1) у вигляді:

$$\vec{\omega}(t) = (2k_2; 2k_1 \cos(2k_2t); -2k_1 \sin(2k_2t)),$$

а кватерніон орієнтації при цьому має вигляд:

$$\Lambda(t) = (\cos(k_1t) \cdot \cos(k_2t); \cos(k_1t) \cdot \sin(k_2t); \sin(k_1t) \cdot \cos(k_2t); -\sin(k_1t) \cdot \sin(k_2t)).$$

Цей обертальний рух відбувається під дією зовнішнього моменту

$$\vec{M}(t) = (2k_1^2(I_2 - I_3) \sin(4k_2t); -4k_1k_2(I_1 + I_2 - I_3) \sin(2k_2t); -4k_1k_2(I_1 - I_2 + I_3) \cos(2k_2t))$$

з початковими умовами:  $\Lambda(t) = (1; 0; 0; 0)$ ,  $\vec{\omega}(t) = (2k_2; 2k_1; 0)$ . Для динамічно симетричного твердого тіла  $I_2 = I_3$  цей рух є вимушеною регулярною прецесією. Для вектора кінетичного моменту тіла  $\vec{K}$  в цьому випадку маємо:  $K^2 = 4I_1^2 k_2^2 + 4I_2^2 k_1^2 = const$ .

**Еталонні моделі обертання, основані на нових представленнях двочастотних розв'язків.**

**Перша еталонна модель обертання.** В основу еталонної моделі обертання в цьому випадку покладено аналітичні залежності для кватерніона орієнтації (4) в умовах, коли значення параметрів  $\eta$ ,  $\xi$  і частот  $k_1, k_2$  задані. Останні можуть задаватися як з міркувань існуючих обмежень на кутову швидкість обертання об'єкта як твердого тіла, так і бути результатом апроксимацій реального руху об'єкта. Модель включає також аналітичні

залежності для квазікоординат у вигляді:

$$\theta_{n1}^* = -\eta \frac{k_1}{k_2} (\sin(2k_2 t_n) - \sin(2k_2 t_{n-1})); \theta_{n2}^* = -\eta \frac{k_1}{k_2} (\cos(2k_2 t_n) - \cos(2k_2 t_{n-1})); \theta_{n3}^* = 2(k_2 - \xi k_1) \Delta t, \quad (13)$$

де  $\Delta t = t_n - t_{n-1}$ .

**Друга еталонна модель обертання.** Модель включає аналітичні залежності для кватерніона орієнтації (10) із заданими значеннями параметрів  $\eta$ ,  $\xi$ , частот  $k_1$ ,  $k_2$  і аналітичні залежності для квазікоординат:

$$\begin{aligned} \theta_{n1}^* &= \xi \frac{k_1}{k_2} (\sin(2k_2 t_n) - \sin(2k_2 t_{n-1})) + 2\eta k_2 \Delta t; \theta_{n2}^* = \eta \frac{k_1}{k_2} (\sin(2k_2 t_n) - \sin(2k_2 t_{n-1})) - 2\xi k_2 \Delta t; \\ \theta_{n3}^* &= \frac{k_1}{k_2} (\cos(2k_2 t_n) - \cos(2k_2 t_{n-1})). \end{aligned} \quad (14)$$

**Чисельна реалізація двочастотних еталонних моделей обертання.** Реалізуємо запропоновані двочастотні моделі для конкретних значень частот і параметрів, такту обчислень  $\Delta t = 0,1$  с на інтервалі часу 200 с.

Для значень частот  $k_1 = 0,15$ ,  $k_2 = 0,356$  і параметрів  $\eta = 0,8$ ,  $\xi = 0,6$  результати реалізації еталонної моделі для першого двочастотного розв'язку (4) у вигляді залежностей квазікоординат  $\theta_{ni}^*$  від часу та траєкторій в конфігураційному просторі параметрів орієнтації представлені на рис. 1 та рис. 2 відповідно.

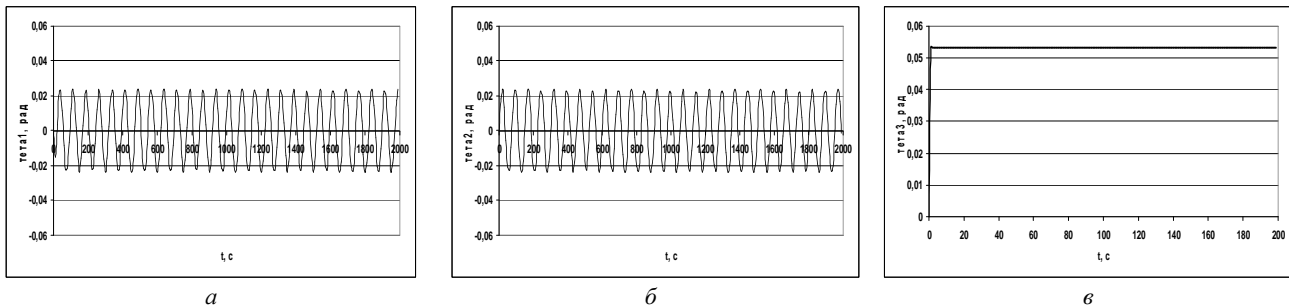


Рис. 1 – Залежність квазікоординат від часу для еталонної моделі першого двочастотного розв'язку при  $k_1 = 0,15$ ,  $k_2 = 0,356$ ,  $\eta = 0,8$ ,  $\xi = 0,6$ : а – по першій осі; б – по другій осі; в – по третій осі.

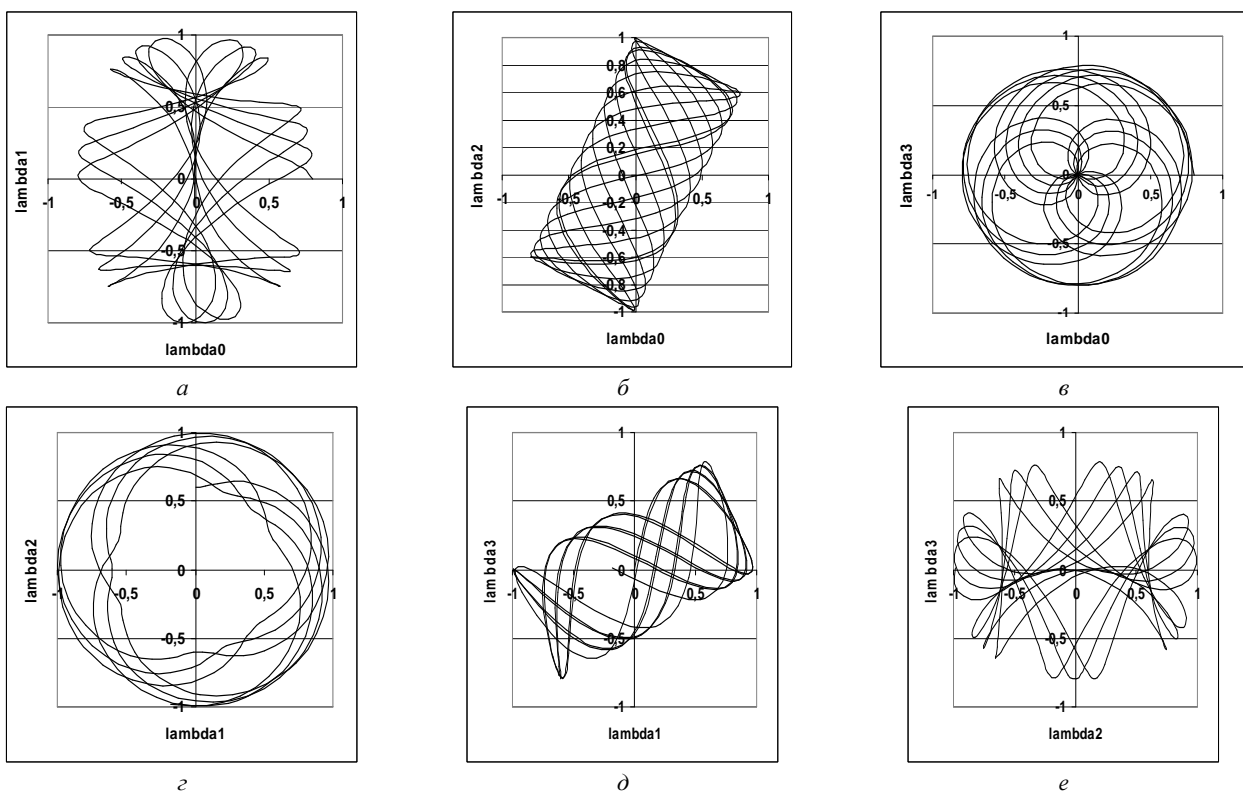


Рис. 2 – Траєкторії в конфігураційному просторі для еталонної моделі першого двочастотного розв'язку при  $k_1 = 0,15$ ,  $k_2 = 0,356$ ,  $\eta = 0,8$ ,  $\xi = 0,6$ : а –  $\lambda_1(\lambda_0)$ ; б –  $\lambda_2(\lambda_0)$ ; в –  $\lambda_3(\lambda_0)$ ; г –  $\lambda_2(\lambda_1)$ ; д –  $\lambda_3(\lambda_1)$ ; е –  $\lambda_3(\lambda_2)$ .

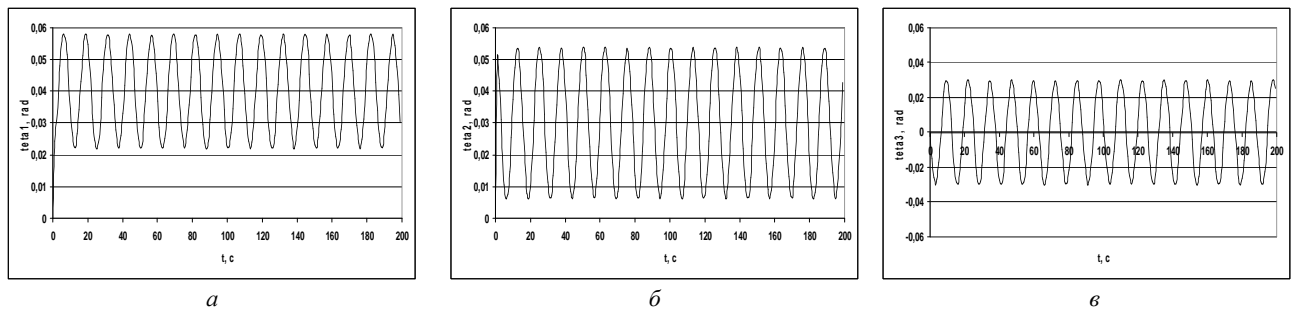


Рис. 3 – Залежність квазікоординат від часу для еталонної моделі другого двочастотного розв'язку при  $k_1 = 0,15$ ,  $k_2 = 0,25$ ,  $\eta = 0,8$ ,  $\xi = -0,6$ : а – по першій осі; б – по другій осі; в – по третій осі.

Залежності від часу квазікоординат для еталонної моделі другого двочастотного розв'язку при значеннях частот  $k_1 = 0,15$ ,  $k_2 = 0,25$  і параметрів  $\eta = 0,8$ ,  $\xi = -0,6$  представлені на рис. 3. Відповідні траєкторії в конфігураційному просторі параметрів орієнтації для цього випадку наведено на рис. 4.

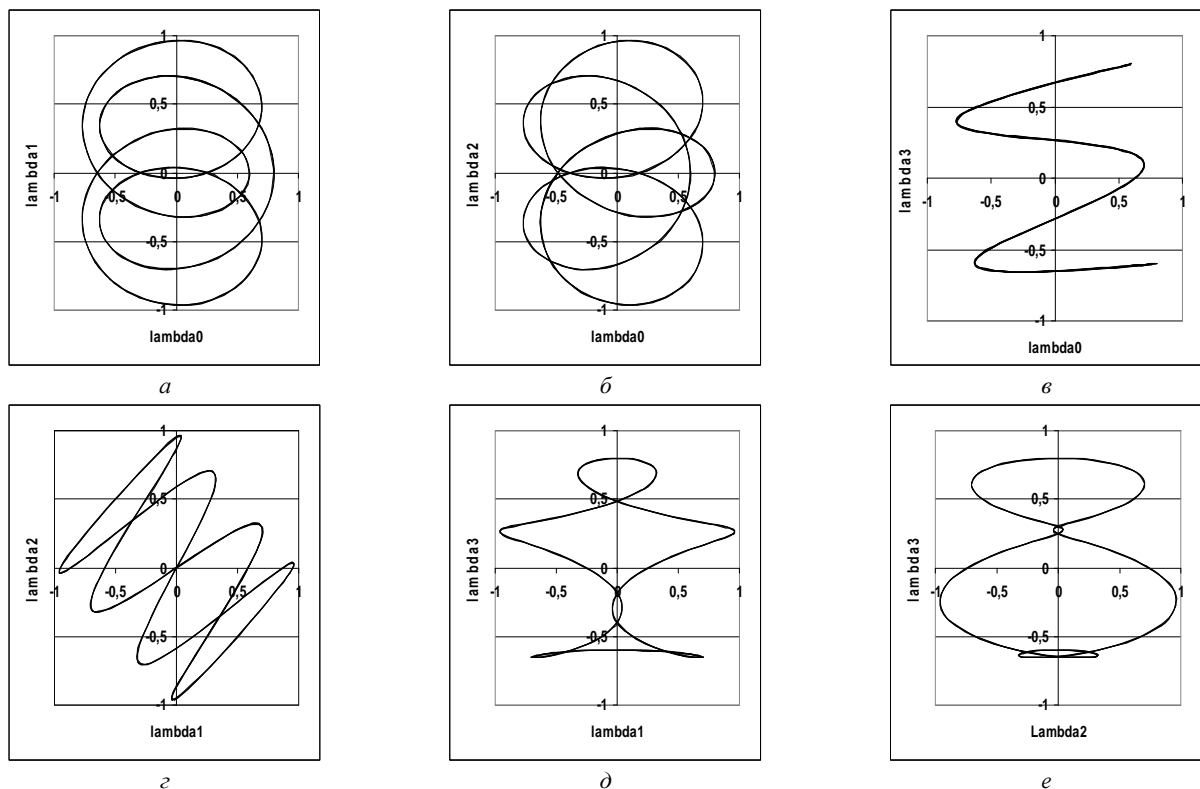


Рис. 4 – Траєкторії в конфігураційному просторі для еталонної моделі другого двочастотного розв'язку при  $k_1 = 0,15$ ,  $k_2 = 0,25$ ,  $\eta = 0,8$ ,  $\xi = -0,6$ : а –  $\lambda_1(\lambda_0)$ ; б –  $\lambda_2(\lambda_0)$ ; в –  $\lambda_3(\lambda_0)$ ; г –  $\lambda_2(\lambda_1)$ ; д –  $\lambda_3(\lambda_1)$ ; е –  $\lambda_3(\lambda_2)$ .

На рис. 5 представлені траєкторії у конфігураційному просторі параметрів, отримані для моделі регулярної прецесії на інтервалі часу 200с з початковими умовами  $\Lambda(0) = (1, 0, 0, 0)$  і  $\vec{\omega}(0) = (0, 012; -0, 011; 0, 015)$  рад/с.

Порівняння результатів, отриманих для еталонних моделей двочастотних розв'язків, з результатами реалізації моделі регулярної прецесії дозволяє зробити висновок, що траєкторії, реалізовані для запропонованих двочастотних моделей в загальному випадку значень частот  $k_1$ ,  $k_2$  і параметрів  $\eta$ ,  $\xi$ , суттєво відрізняються від траєкторій, отриманих для регулярної прецесії, і є більш складними.

**Точносний аналіз алгоритму орієнтації третього порядку на двочастотних еталонних моделях.** Застосуємо побудовані чисельні реалізації двочастотних еталонних моделей для отримання оцінки точності алгоритму третього порядку, для якого кватерніон повороту  $\Delta\Lambda_n^* = (\Delta\lambda_{n0}^*, \Delta\vec{\lambda}_n^*)$  на такті  $[t_{n-1}, t_n]$  має вигляд [14]:

$$\Delta\lambda_{n0}^* = 1 - \frac{1}{8}\theta_n^{*2}, \quad \Delta\vec{\lambda}_n^* = \frac{1}{2}\vec{\theta}_n^* \left(1 - \frac{1}{24}\theta_n^{*2}\right) + \frac{1}{24}(\vec{\theta}_{n-1}^* \times \vec{\theta}_n^*), \quad (15)$$

де  $\theta_n^{*2} = \theta_{n1}^{*2} + \theta_{n2}^{*2} + \theta_{n3}^{*2}$ . Для оцінювання точності алгоритму в якості похибки будемо визначати неусувну похибку орієнтації – накопичений малий кут повороту (дрейф) обчисленого трієдру осей відносно його істинного положення, яке задається еталонною моделлю. Для цього використаємо методику визначення дрейфу, запропо-

новану в [14].

На рис. 6 представлені залежності похибки дрейфу від часу на інтервалі часу  $t \in [0, 2000]$  с, отримані з кроком  $\Delta t = 0,1$  с на еталонних моделях обертання, які основані на першому та другому двочастотних розв'язках, для випадку  $|\vec{\omega}(t)| = 0,5831$  рад/с. Для порівняння на рис. 6 приведена відповідна залежність похибки дрейфу від часу, що отримана на еталонній моделі регулярної прецесії з початковими умовами  $\Lambda(0) = (1, 0, 0, 0)$  і  $\vec{\omega}(0) = (0,15; -0,356; 0,437)$  рад/с, для якої також виконується умова  $|\vec{\omega}(t)| = 0,5831$  рад/с.

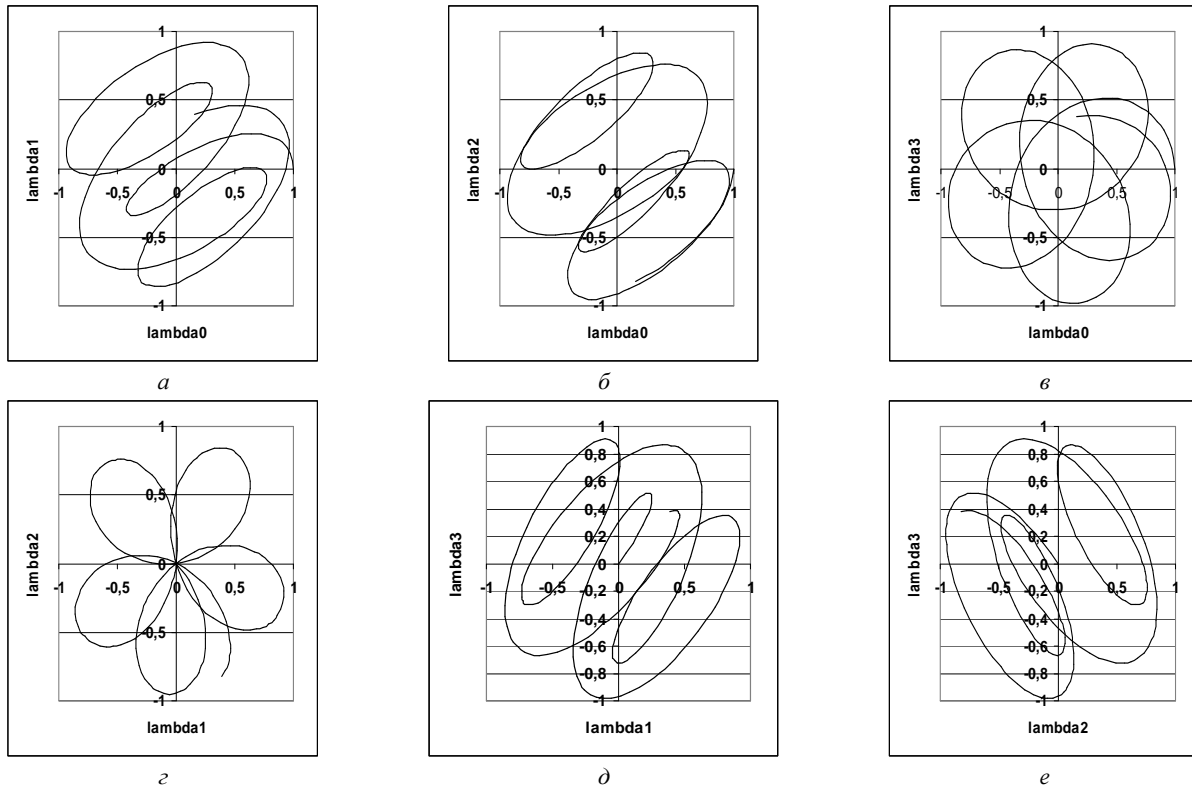


Рис. 5 – Трасекторії в конфігураційному просторі для еталонної моделі регулярної прецесії з початковими умовами  $\Lambda(0) = (1, 0, 0, 0)$  і  $\vec{\omega}(0) = (0,15; -0,356; 0,437)$  рад/с: а –  $\lambda_1(\lambda_0)$ ; б –  $\lambda_2(\lambda_0)$ ; в –  $\lambda_3(\lambda_0)$ ; г –  $\lambda_2(\lambda_1)$ ; д –  $\lambda_3(\lambda_1)$ ; е –  $\lambda_3(\lambda_2)$ .

Аналіз приведених залежностей на рис. 6 дозволяє зробити наступні висновки:

- похибка дрейфу (за однакових умов по модулю вектора кутової швидкості для всіх тестових рухів) зростає з часом, але швидкість зростання похибки дрейфу в умовах нових еталонних моделей перевищує швидкість зростання похибки дрейфу у випадку моделі регулярної прецесії;
- найгіршим тестовим рухом з точки зору похибки дрейфу для вибраного алгоритму є еталонна модель, що основана на першому двочастотному розв'язку;
- тестовий рух у вигляді регулярної прецесії не є найгіршим тестовим рухом для аналізу похибок алгоритмів орієнтації БІНС, як це вважалося раніше.

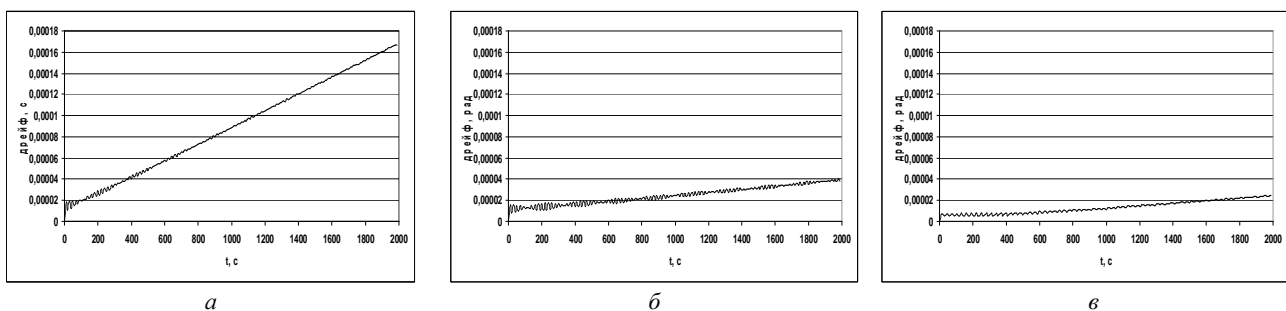


Рис. 6 – Залежності похибки дрейфу від часу для алгоритму 3-го порядку, отримані: а – на еталонній моделі (4), (13) першого двочастотного розв'язку; б – на еталонній моделі (10), (14) другого двочастотного розв'язку; в – на еталонній моделі регулярної прецесії.

**Висновки.** Запропоновано два нові двочастотні розв'язки системи динамічних і кінематичних рівнянь обертання твердого тіла і отримано на їх основі еталонні моделі обертання. Чисельна реалізація еталонних моделей показала, що відповідний рух суттєво відрізняється від випадку класичної регулярної прецесії, та є більш склад-

ним рухом. Реалізації еталонних моделей використані, як тестові рухи, для оцінювання похибки дрейфу алгоритму орієнтації третього порядку. При цьому похибка дрейфу, що має місце для запропонованих моделей, значно більша, ніж та, що має місце для моделі регулярної прецесії з таким самим модулем вектора кутової швидкості.

#### Список літератури

1. Литманович Ю. Прогресс в разработке БИНС на Западе и Востоке в материалах Санкт-Петербургских конференций за десятилетие // X Санкт-Петербургская Междунар. конф. – С.-Петербург : ЦНИИ «Электроприбор». – 2003. – С. 250 – 260.
2. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Введение в теорию бесплатформенных инерциальных навигационных систем. – М. : Наука, 1992. – 280 с.
3. Панов А. П. Математические основы теории инерциальной навигации. – К. : Наукова думка, 1995. – 280 с.
4. Savage P. G. Strapdown inertial navigation integration algorithm design. Part 1 : Attitude algorithms // Journal of Guidance, Control and Dynamics. – Vol. 21. – No 1. – 1998. – P.19 – 28.
5. Панов А. П. Двухшаговые алгоритмы вычисления параметров ориентации // Косм. иссл. на Украине. – К. : Наукова думка, 1974. – Вып. 5. – С. 76 – 82.
6. Ткаченко А. И. О применении параметров Родрига-Гамильтона в алгоритмах определения ориентации объекта // Кибернетика и вычислительная техника. – К., 1970. – Вып. 5. – С. 20 – 22.
7. Miller R. B. A new strapdown attitude algorithm // Journal of Guidance, Control and Dynamics. – Vol. 6. – No 4. – 1983. – P. 287 – 291.
8. Ignagni M. B. Optimal strapdown attitude integration algorithms // Journal of Guidance, Control and Dynamics. – Vol. 13. – No 2. – 1990. – P. 363 – 369.
9. Панов А. П. Оптимизация методов вычисления кватернионов при конических колебаниях твердого тела // Механика гироскопических систем. – К., 1984. – Вып. 3. – С. 105 – 112.
10. Панов А. П. Оптимизация высокоточных алгоритмов вычисления кватернионов в случае прецессии твердого тела // Кибернетика и вычислительная техника. – К., 1987. – Вып. 73. – С. 3 – 9.
11. Musoff H., Murphy J. H. A Study of strapdown integration algorithms // Journal of Guidance, Control and Dynamics. – Vol. 18. – No 2. – 1995. – P. 287 – 290.
12. Плаксий Ю. А. Мультипликативні трьохчастотні моделі обертання твердого тіла // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Х. : НТУ «ХПІ». – 2016. – № 16 (1188). – С. 72 – 80.
13. Плаксий Ю. А. Трьохчастотні аналітичні еталонні моделі обертання твердого тіла // Вісник НТУ «ХПІ». Серія : Математичне моделювання в техніці та технологіях. – Х. : НТУ «ХПІ». – 2014. – № 6 (1049). – С. 175 – 185.
14. Бранец В. Н., Шмыглевский И. П. Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. – М. : Наука, 1973. – 320 с.

#### References (transliterated)

1. Litmanovich Yu. Progress v razrabotke BINS na Zapade i Vostoke v materialakh Sankt-Peterburgskikh konferentsiy za desyatiletie [Progress in the development of SINS in the West and East in the materials of the St. Petersburg conferences over the decade]. *X Sankt-Peterburgskaya Mezhdunar. konf.* [X St. Petersburg International Conference]. St. Petersburg, TsNII "Yelektropryor" Publ., 2003, pp. 250–260.
2. Branets V. N., Shmyglevskiy I. P. *Vvedenie v teoriyu besplatformennykh inertial'nykh navigatsionnykh sistem* [Introduction to the theory of strapdown inertial navigation systems]. Moscow, Nauka Publ., 1992. 280 p.
3. Panov A. P. *Matematicheskie osnovy teorii inertial'noy navigatsii* [Mathematical foundations of the theory of inertial navigation]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1995. 280 p.
4. Savage P. G. Strapdown inertial navigation integration algorithm design. Part 1 : Attitude algorithms. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. 1998, vol. 21, no. 1, pp. 19–28.
5. Panov A. P. Dvushagovye algoritmy vychisleniy parametrov orientatsii [Two-step algorithms for calculating orientation parameters]. *Kosm. issl. na Ukraine* [Space research in Ukraine]. Kyiv, Naukova dumka Publ., 1974, no. 5, pp. 76–82.
6. Tkachenko A. I. O primeneni parametrov Rodriga-Gamil'tona v algoritmakh opredeleniya orientatsii ob'ekta [On the application of the Rodrigues-Hamilton parameters in the algorithms of determining object orientation]. *Kibernetika i vychislitel'naya tekhnika* [Cybernetics and Computer Technology]. Kyiv, 1970, no. 5, pp. 20–22.
7. Miller R. B. A new strapdown attitude algorithm. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. 1983, vol. 6, no. 4, pp. 287–291.
8. Ignagni M. B. Optimal strapdown attitude integration algorithms. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. 1990, vol. 13, no. 2, pp. 363–369.
9. Panov A. P. Optimizatsiya metodov vychisleniya kvaternionov pri konicheskikh kolebaniyakh tverdogo tela [Optimization of methods for calculating quaternions in the case of conic vibrations of a rigid body]. *Mekh. girosk. sistem.* [Mechanics of Gyroscopic Systems]. Kyiv, 1984, vol. 3, pp. 105–112.
10. Panov A. P. Optimizatsiya vysokotochnykh algoritmov vychisleniya kvaternionov v sluchae pretsessii tverdogo tela [Optimization of high-precision algorithms for computing quaternions in the case of recession of a rigid body]. *Kibernetika i vychislitel'naya tekhnika* [Cybernetics and Computer Technology]. K. 1987. Vyp. 73, pp. 3–9.
11. Musoff H., Murphy J. H. A Study of strapdown integration algorithms. *Journal of Guidance, Control and Dynamics*. 1995, vol. 18, no. 2, pp. 287–290.
12. Plaksiy Yu. A. Mul'typlikativni triekhchastotni modeli obertannya tverdogo tila [Multiplicative three-frequency models of rigid body rotation]. *Visnyk NTU «KhPI»*. Seriya : Matematychnye modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh [Bulletin of NTU «KhPI». Series : Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2016, no. 16 (1188), pp. 72–80.
13. Plaksiy Yu. A. Triekhchastotni analitychni etalonni modeli obertannya tverdogo tila [Three-frequency reference analytical models of rigid body rotation]. *Visnyk NTU «KhPI»*. Seriya : Matematychnye modelyuvannya v tekhnitsi ta tekhnologiyakh [Bulletin of NTU «KhPI». Series : Mathematical modeling in engineering and technologies]. Kharkiv, NTU «KhPI» Publ., 2014, no. 6 (1049), pp. 175–185.
14. Branets V. N., Shmyglevskiy I. P. *Primenenie kvaternionov v zadachakh orientatsii tverdogo tela* [Application of quaternions in the problems of a rigid body orientation]. Moscow, Nauka Publ., 1973. 320 p.

Надійшло (received) 25.09.2018

#### Відомості про авторів / Сведения об авторах / Information about authors

**Плаксий Юрій Андрійович (Плаксий Юрий Андреевич, Plaksiy Yuriy Andriyovych)** – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-36; e-mail: plaksiy.yu@gmail.com.

**Гомозкова Ірина Олександрівна (Гомозкова Ирина Александровна, Homozkova Iryna Oleksandrivna)** – аспірант, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», м. Харків; тел.: (057) 707-64-36; e-mail: arinhomozkova@gmail.com.